Геометрическая вероятность.

Теория вероятностей,
9 класс.

Основной вопрос:

- Как связано понятие вероятности с геометрией?

- Задачи:

1. Провести серию опытов.
2. Сформулировать геометрическое понятие вероятности.
3. Изучить литературу по данному вопросу.
4. Сделать выводы. Подтвердить или опровергнуть гипотезу.
5. Составить задачи на нахождение вероятностей.

Серия опытов.

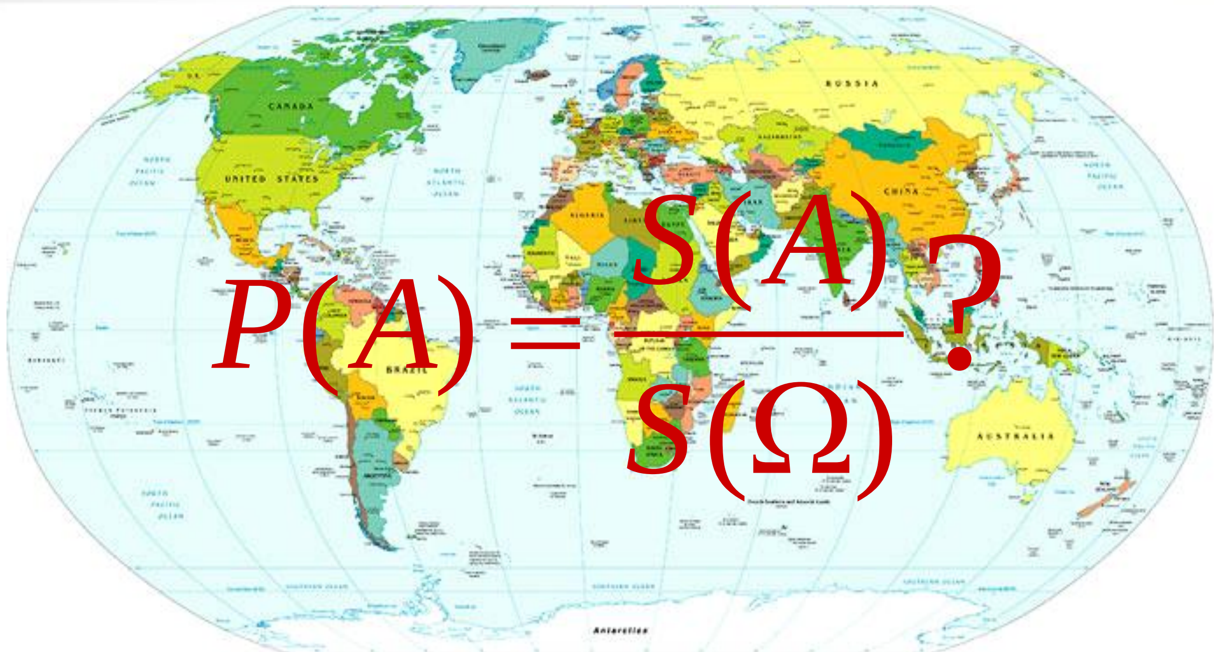
Серия опытов, приводящих к определению вероятности из геометрических соображений.

Опыт 1. Выберем на географической карте мира случайную точку (например, зажмурим глаза и покажем указкой). Какова вероятность, что эта точка окажется в России?

- **Число исходов бесконечно.**
- **Вероятность будет зависеть от размера карты (масштаба).**

Опыт 1.

Выберем на географической карте мира случайную точку (например, зажмурим глаза и покажем указкой). Какова вероятность, что эта точка окажется в России?



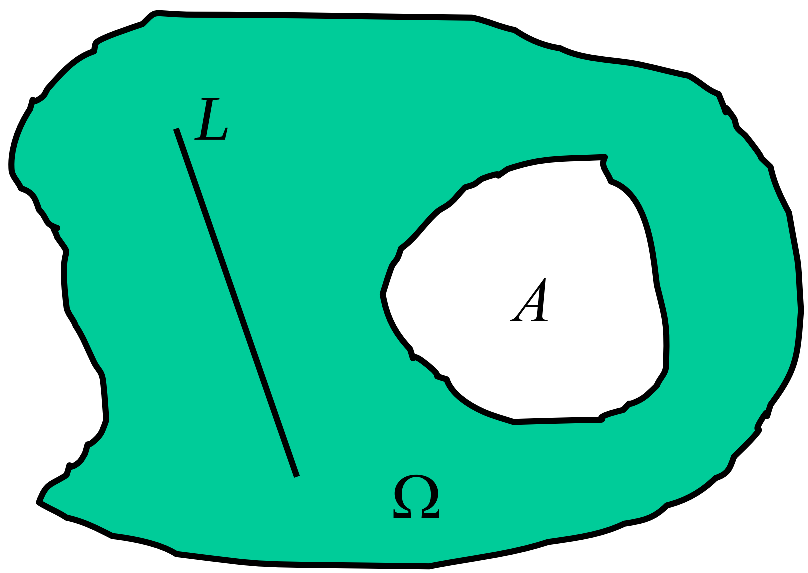
$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}\ ?$$

ГИПОТЕЗА: Очевидно, для ответа на вопрос нужно знать, какую часть всей карты занимает Россия.

Точнее, какую часть всей площади карты составляет Россия.

Отношение этих площадей и даст искомую вероятность.

Общий случай: в некоторой ограниченной области Ω случайно выбирается точка. Какова вероятность, что точка попадет в область *A*? На прямую *L*?



$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$S(L) = 0; P(L) = \frac{0}{S(\Omega)} = 0$$

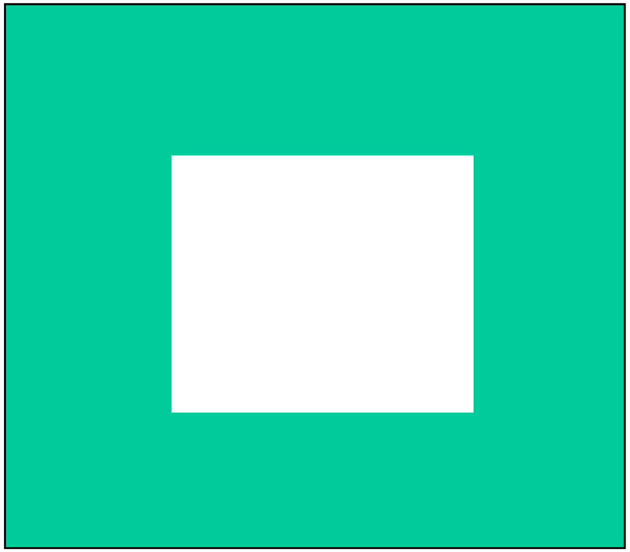
Геометрическое определение вероятности

- Если предположить, что попадание в любую точку области Ω равновозможно, то вероятность попадания случайной точки в заданное множество A будет равна отношению площадей: $$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$
- Если A имеет нулевую площадь, то вероятность попадания в A равна нулю.
- Можно определить геометрическую вероятность в пространстве и на прямой:

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}; P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

Опыт 2. В квадрат со стороной 4 см «бросают» точку.

Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата будет меньше 1 см?

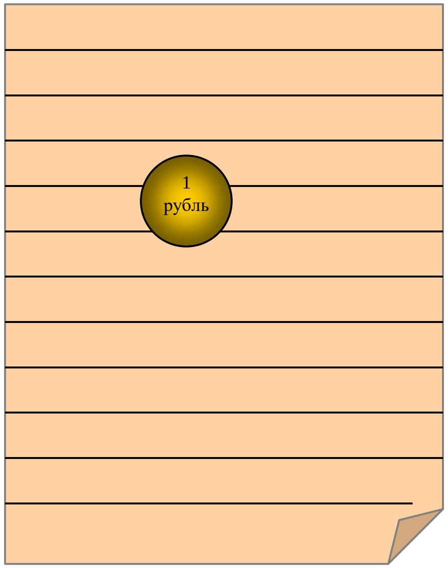


Закрасим в квадрате множество точек, удаленных от ближайшей стороны меньше, чем на 1 см.

Площадь закрашенной части квадрата $16см^2 – 4см^2 = 12см^2$.

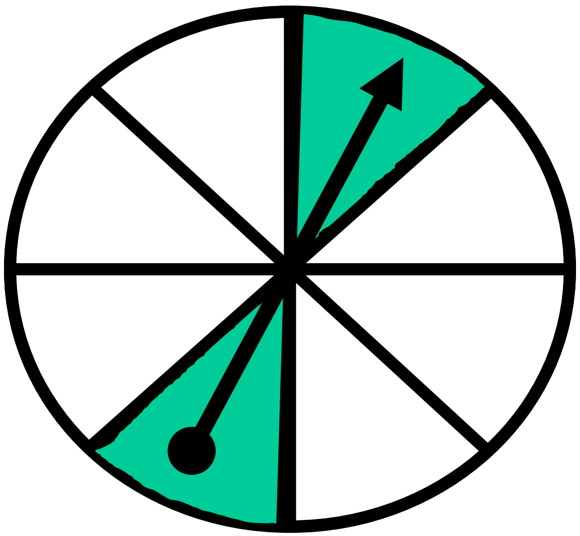
Значит, $P(A) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Опыт 3. На тетрадный лист в линейку наудачу бросается монета. Какова вероятность того, что монета пересекла две линии?



- Число исходов зависит от размеров монеты, расстояния между линиями.

Опыт 4. В центре вертушки закреплена стрелка, которая раскручивается и останавливается в случайном положении. С какой вероятностью стрелка вертушки остановится на зеленом секторе?



Для решения этой задачи можно вычислить площадь зеленных секторов и разделить ее на площадь всего круга: $S(A)=\dfrac{\pi R^2}{4};S(\Omega)=\pi R^2;P(A)=\dfrac{1}{4}=0{,}25$

Вывод.

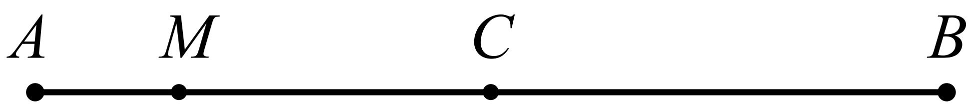
- Изучив литературу, мы пришли к выводу, что наше предположение верно, т. е. дали верное геометрическое определение вероятности.

Решение тренировочных задач.

Задачи 1 – 3.

Задача №1.

Дано: AB=12см, AM=2см, MC=4см. На отрезке AB случайным образом отмечается точка X. Какова вероятность того, что точка X попадет на отрезок: 1) AM; 2) AC; 3) MC; 4) MB; 5) AB?



Решение.

1) A={точка X попадает на отрезок AM}, AM=2см, AB=12см,

$$P(A)=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

2) B ={точка X попадает на отрезок AC}, AC=2см+4см=6см,

$$P(B)=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

3) C ={точка X попадает на отрезок MC}, MC=4см, AB=12см,

$$P(C)=\frac{MC}{AB}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

4) D={точка X попадает на отрезок MB}, MB=12см–2см=10см,

$$P(D)=\frac{MB}{AB}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

5) E={точка X попадает на отрезок AB},

$$P(A)=\frac{AB}{AB}=1$$

Задача №2. Оконная решетка состоит из клеток со стороной 20см. Какова вероятность того, что попавший в окно мяч, пролетит через решетку, не задев ее, если радиус мяча равен: а) 10см, б) 5см?

Решение.

а) $S_{мяча} = \pi R^2 = 100\pi (см^2)$

$S_{кв} = a^2 = 20^2 = 400(см^2)$

$$P(A) = \frac{S_{мяча}}{S_{кв}} = \frac{100\pi}{400} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$$

б) $S_{мяча} = 5^2 \pi = 25\pi (см^2)$

$S_{кв} = 400(см^2)$

$$P(A) = \frac{25\pi}{400} = \frac{\pi}{16} \approx 0{,}20$$

Задача №3. Оконная решетка состоит из клеток со стороной 20см. В решетку 100 раз бросили наугад один и тот же мяч. В 50 случаях он пролетел через решетку не задев ее. Оцените приближенно радиус мяча.

Решение.

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{S_{мяча}}{S_{кв}} = \frac{\pi R^2}{400}$$

$$\frac{\pi R^2}{400} = \frac{1}{2}$$

$$R^2 = \frac{400}{2 \cdot \pi} = \frac{200}{\pi}$$

$$R = \sqrt{\frac{200}{\pi}} = \frac{10\sqrt{2}}{\pi} \approx 4{,}5(см)$$

Итог.

Вопросы. Задача.

Вопросы:

1. Что такое геометрическая вероятность? Каковы формулы геометрической вероятности (на плоскости, на прямой, в пространстве)?
2. Можно ли вычислить геометрические вероятности для опыта, исходы которого не являются равновозможными?

Задача.

Внутри квадрата со стороной 10см выделен круг радиусом 2см. Случайным образом внутри квадрата отмечается точка. Какова вероятность того, что она попадет в выделенный круг?